SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

E. OBRECHT

CONDIZIONI DI PARABOLICITA' PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE IN UNO SPAZIO DI BANACH

19 MAGGIO 1988

Negli ultimi anni numerosi autori si sono interessati di equazioni di evoluzione del secondo ordine.

A questo riguardo un'ampia bibliografia fino al 1980 è contenuta nel libro di Fattorini [3], 2.5.(c).

Più recenti sono i lavori di Sandefur [10], Neubrander [6], Aviles-Sandefur [1], Tanabe [12],[13], Škalikov [11], Clément-Prüss [2].

In questo seminario voglio illustrare alcuni risultati, ottenuti in collaborazione con Angelo Favini, che forniscono condizioni sui coefficienti A e B dell'equazione differenziale

$$(1) \qquad u'' + Bu' + Au = 0$$

in uno spazio di Banach, affinché la (1) sia parabolica. Sono allora applicabili i risultati che ho illustrato negli anni scorsi ([7],[8],[9]).

Voglio qui ricordare che un'ampia classe di problemi al contorno può essere trattata con tali metodi; più precisamente, la realizzazione in $L^p(\Omega)$, dove Ω è un aperto limitato di R^n, con frontiera sufficientemente regolare, di equazioni paraboliche secondo Petrovskii. La dimostrazione più completa della verifica delle ipotesi astratte in questo caso è stata data da Tanabe [13].

Ricordo infine che S. Chen e Triggiani [15] hanno recentemente ottenuto la parabolicità di un fascio operatoriale in uno spazio di Hilbert, supponendo i coefficienti autoaggiunti e positivi.

1. ALCUNE CONDIZIONI PRELIMINARI

Nel seguito supporremo sempre che X sia uno spazio di Banach complesso e che A e B siano operatori lineari chiusi in X.

Diremo che il fascio operatoriale $P(\lambda) \equiv \lambda^2 + \lambda B + A$ è parabolico, se si verificano le condizioni seguenti:

a) $\exists K \in R^+$, $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, tali che:

$$\exists P^{-1}(\lambda) \in \mathscr{L}(X), \quad \forall \lambda \in \Sigma_{K,\theta} \equiv \{z \in C\backslash\{0\} \mid |z| > K, \quad |\arg z| < \theta\};$$

b) $\exists M \in R^+$, tale che

$$\|P^{-1}(\lambda)\| \leq M|\lambda|^{-2} \quad , \quad \|BP^{-1}(\lambda)\| \leq M|\lambda|^{-1},$$

$$\|AP^{-1}(\lambda)\| \leq M, \quad \forall \lambda \in \Sigma_{K,\theta}.$$

Cominciamo con lo stabilire due condizioni che danno un'idea di come debbano essere connessi i domini di A e B affinché il fascio P sia parabolico.

Prop. 1. Se $-B$ genera un semigruppo analitico e $\mathscr{D}(B) \subseteq \mathscr{D}(A)$, allora P è parabolico.

Prop. 2. Se $\mathscr{D}(A) \subseteq \mathscr{D}(B)$ ed $\exists \alpha \in [0,1[$, $C \in R^+$, tali che

$$\|Bx\| \leq C\|Ax\|^{\alpha}\|x\|^{1-\alpha} \quad , \quad \forall x \in \mathscr{D}(A),$$

allora P è parabolico se, e solo se, A (e quindi anche B) è limitato e ovunque definito.

I risultati precedenti ci dicono che, se il dominio di B è "grande" (rispetto a quello di A), allora il fascio P è parabolico, mentre se è troppo "piccolo" non si può avere parabolicità, tranne il caso banale di coefficienti limitati. Osservo esplicitamente che la condizione della Prop. 2 è senz'altro verificata se $\mathscr{D}(B)$ contiene, algebricamente e topologicamente, uno spazio di interpolazione fra $\mathscr{D}(A)$ e X di ordine maggiore di $\frac{1}{2}$ (se l'ordine degli spazi viene scelto in modo che, al crescere del parametro, lo spazio di interpolazione diminuisca).

Pertanto, i casi interessanti si hanno quando il dominio di B è "al

l'incirca" del tipo $\mathscr{D}(A^\alpha)$, con $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$.

Il risultato seguente mostra, come nel caso $\alpha = \frac{1}{2}$, non sono sufficienti ipotesi sul dominio dei coefficienti e sull'angolo di apertura dei loro spettri per assicurare la parabolicità.

<u>Prop. 3.</u> Sia $-A$ il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico in X e poniamo

$$\theta_\infty = \inf\{\theta \in [0, \tfrac{\pi}{2}[\ ;\ \exists H,K \in R^+ : \Xi = \{z \in C \mid |z| \geq K,$$

$$|\arg z| \geq \theta\} \supset \rho(A),\ \|(A-z)^{-1}\| \leq H\,|z|^{-1},\ \forall z \in \Xi\}.$$

Allora, se $\rho \in R^+$, il fascio $P_\rho(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda\rho A^{1/2} + A$ è parabolico se, e solo se, $\rho > \operatorname{sen}(\theta_\infty/2)$.

<u>Esempio 1.</u> Sia $X = \mathscr{C}([a,b])$,

$$\mathscr{D}(A) = \{u \in \mathscr{C}^{(4)}([a,b]);\ u(a)=u(b)=u''(a)=u''(b) = 0\}\quad Au = u^{(iv)},$$

$$\mathscr{D}(B) = \{u \in \mathscr{C}^{(2)}([a,b]);\ u(a) = u(b) = 0\}\ ,\quad Bu = -u''$$

E' noto [5] che $-A$ genera un semigruppo analitico in X; inoltre $-B$ genera un semigruppo analitico, $B^2 = A$ e lo spettro di B è contenuto in R^+. Pertanto si può applicare la Prop. 3, ottenendo che il fascio $\lambda^2 + \rho\lambda B + A$ è parabolico in $\mathscr{C}([a,b])$, $\forall \rho \in R^+$.

La Proposizione 3 mostra come non vi siano molte speranze di ottenere risultati generali nel caso $\mathscr{D}(B) = \mathscr{D}(A^{1/2})$, anche in un caso molto semplice come quello considerato.

Nel seguito ci sarà utile anche il seguente risultato, che assicura che perturbazioni di ordine inferiore non distruggono la parabolicità.

Prop. 4. Sia $P(\lambda)\equiv\lambda^2+\lambda B+A$ un fascio parabolico e siano A_1 e B_1 operatori chiusi in X, tali che $\mathscr{D}(A_1)\supset\mathscr{D}(A)$, $\mathscr{D}(B_1)\supset\mathscr{D}(B)$, ed esistano $\alpha,\beta\in[0,1[$, $C\in R^+$; tali che,

$$\|A_1x\| \leq C\|Ax\|^{\alpha}\|x\|^{1-\alpha}, \quad \forall x\in\mathscr{D}(A)$$

$$\|B_1x\| \leq C\|Bx\|^{\beta}\|x\|^{1-\beta}, \quad \forall x\in\mathscr{D}(B).$$

Allora, il fascio $P_1(\lambda) \equiv \lambda^2+\lambda(B+B_1)+A+A_1$ è parabolico.

3. CONDIZIONI DI PARABOLICITA' NEL CASO $\frac{1}{2}<\alpha<1$

Cominciamo col mostrare con un esempio come, anche nel caso in cui $\mathscr{D}(B) = \mathscr{D}(A^{\alpha})$, $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, il fatto che -B e -A generino semigruppi analitici non implichi che il fascio corrispondente sia parabolico.

Sia $\alpha\in]\frac{1}{2},1[$ e poniamo

$$\mathscr{D}(A) = H^2(R^n), \quad (Au)(x) = e^{i\phi}(1-\Delta)u(x),$$

$$\mathscr{D}(B_\alpha) = H^{2\alpha}(R^n), \quad (B_\alpha u)(x) = e^{-i\psi}(1-\Delta)^{\alpha}u(x),$$

dove ϕ,ψ $]0, \frac{\pi}{2}[$ sono tali che $\phi+\psi > \frac{\pi}{2}$.

Osserviamo innanzitutto che -A e $-B_\alpha$ generano semigruppi analitici e che $\mathscr{D}(B_\alpha) = \mathscr{D}(A^{\alpha})$. D'altra parte, $\exists B_\alpha^{-1}\in\mathscr{L}(X)$ e si ha:

$$P_\alpha(\lambda) \equiv \lambda^2 + \lambda B_\alpha+A = (\lambda+AB_\alpha^{-1})(\lambda+B_\alpha) + \lambda AB_\alpha^{-1}.$$

Poiché AB_α^{-1} è l'operatore pseudodifferenziale in $S^{2-2\alpha}_{1,0}(R^n)$ di simbolo $\sigma(\xi) = e^{i(\phi+\psi)}(1+|\xi|^2)^{1-\alpha}$, esso è completamente subordinato a B (perché $\alpha > \frac{1}{2}$);

pertanto, per la Prop. 4, P_α è parabolico se, e solo, se lo è $(\lambda+AB_\alpha^{-1})(\lambda+B_\alpha)$. Ora, poiché $-B_\alpha$ genera un semigruppo analitico, P_α sarà parabolico se, e solo se, $-AB_\alpha^{-1}$ genera anch'esso un semigruppo analitico. Ma, per un risultato di M. Wong [14], lo spettro di AB_α^{-1} è $\{e^{i(\phi+\psi)}(1+|\xi|^2)^{1-\alpha} | \xi \in R^n\}$ e, quindi, il suo opposto non è il generatore di un semigruppo.

Questo esempio suggerisce il seguente risultato.

Teorema 1. Siano A,B operatori lineari chiusi in X, tali che:

a) $-B$ genera un semigruppo analitico e $0 \in \rho(B)$;

b) $-AB^{-1}$ genera un semigruppo analitico;

c) $\mathscr{D}(B^2) \subset \mathscr{D}(A)$ ed $\exists K \in R^+$, tale che

$$\|AB^{-1}(\lambda+B)^{-1}\| < 1, \ \forall \lambda \in C, \ |\lambda|>K, \ \mathrm{Re}\lambda \geq 0.$$

Allora il fascio $P(\lambda) \equiv \lambda^2+\lambda B+A$ è parabolico.

Prima di esaminare in dettaglio le ipotesi del Teorema 1, mostriamo un semplice esempio, al quale esso è applicabile.

Esempio 2. Siano $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$, $\beta \in]0,\pi[$, tali che $\alpha\beta < \frac{\pi}{2}$; sia poi A un operatore in X, tale che

$$\Sigma_\beta = \{z \in C\backslash\{0\} | \ |\arg z| > \beta\} \cup \{0\} \subset \rho(A) \text{ ed } \exists M \in R^+, \text{ tale che}$$

$$\|(A-z)^{-1}\| \leq M(1+|z|)^{-1}, \ \forall z \in \Sigma_\beta.$$

Allora, $\forall \sigma \in R^+$, il fascio $\lambda^2+\lambda\sigma A^\alpha+A$ è parabolico. Infatti, poiché $\rho(-\sigma A^\alpha) \supset \{z \in C\backslash\{0\} | \ |\arg z| > \alpha\beta\}$ e ivi il risolvente ha decrescenza massimale, $-\sigma A^\alpha$ genera un semigruppo analitico, per le condizioni poste su α e β. Inoltre,

$-A(\sigma A^{\alpha})^{-1} = -\frac{1}{\sigma} A^{1-\alpha}$ e questo genera un semigruppo analitico, perché $\rho(A^{1-\alpha}) \supset \supset \{z \in C \setminus \{0\} \mid |\arg z| > \beta(1-\alpha)\}$ e ivi ha decrescenza massimale. Inoltre, la condizione c) è soddisfatta, in virtù della disuguaglianza dei momenti.

Esempio 3. Siano $k,m \in N$, $\frac{m}{2} < k < m$ e indichiamo con A la realizzazione in $L^2(R^n)$ dell'operatore differenziale $(1-\Delta)^m$. Allora, $A^{k/m}$ è la realizzazione in $L^2(R^n)$ dell'operatore differenziale $(1-\Delta)^k$. Pertanto, il fascio

$$\lambda^2 + \lambda\sigma(1-\Delta)^k + (1-\Delta)^m$$

è parabolico in $L^2(R^n)$, $\forall \sigma \in R^+$.

Osservazione 1. L'ipotesi c) nel Teorema 1 è senz'altro verificata se vale la a) e una delle due seguenti affermazioni, che sono equivalenti:

c_1) $\mathscr{D}(B) \subset \mathscr{D}(AB^{-1})$ ed $\exists \alpha \in]0,1[$, $C_1 \in R^+$, tali che

$$\|AB^{-1}x\| \leq C_1 \|Bx\|^{\alpha} \|x\|^{1-\alpha} \quad , \quad \forall x \in \mathscr{D}(B);$$

c_2) $\mathscr{D}(B^2) \subset \mathscr{D}(A)$ ed $\exists \beta \in]0,1[$, $C_2 \in R^+$, tali che

$$\|Ay\| \leq C_2 \|B^2 y\|^{\beta} \|y\|^{1-\beta} \quad , \forall y \in \mathscr{D}(B^2).$$

Osservazione 2. L'ipotesi a) nell'enunciato del Teorema 1 è verificata in molti casi concreti. Per esempio, sia Ω un aperto limitato di R^n con frontiere regolare e consideriamo il problema

$$(2)\qquad \begin{cases} (\partial_t^2 + \mathscr{B}(x,\partial_x)\partial_t + \mathscr{A}(x,\partial_x))u = f, \text{ in } R^+ x\Omega, \\ C_j(x,\partial_x)u/\partial\Omega = 0, \quad j = 1,\dots,m, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad \text{in } \Omega, \\ \partial_t u(0,x) = u_1(x), \text{ in } \Omega . \end{cases}$$

Qui $\mathscr{A}(x,\partial_x)$ e $\mathscr{B}(x,\partial_x)$ sono operatori ellittici di ordine 2m e 2k ($\frac{m}{2}<k<m$), rispettivamente. Se gli operatori differenziali di bordo C_j sono ordinati in modo che ord C_j < ord C_{j+1}, $j = 1,\dots,m$, e vale la proprietà

$$\text{ord } C_k < 2k \leq \text{ord } C_{k+1},$$

è noto che, sotto condizioni molto generali, le realizzazioni in $L^p(\Omega)(1<p<+\infty)$ e in $\mathscr{C}(\bar{\Omega})$ di $-\mathscr{B}(x,\partial_x)$ con le condizioni al bordo $C_1,\dots,C_k$ generano semigruppi analitici. Con la usuale tecnica di cambiamento di funzione incognita nel problema (2), è poi possibile traslare lo spettro di B, in modo che $0 \in \rho(B)$.

Ciò però non può verificarsi se ord $C_k \geq 2k$ oppure se ord $C_{k+1}<2k$.

Il prossimo risultato permette di ovviare a questo inconveniente nel secondo caso.

<u>Teorema 2.</u> Siano A,B operatori lineari chiusi in X, tali che:

a') $\exists B_1$ operatore lineare chiuso in X ed

$\exists T \in \mathscr{L}(\mathscr{D}(B_1);X)$, tali che:

i) $\mathscr{D}(A) \subset \text{Ker } T$;

ii) $B_{1/\text{Ker } T} = B$;

iii) $-B_1$ genera un semigruppo analitico e $0 \in \rho(B_1)$;

b') $-AB_1^{-1}$ genera un semigruppo analitico;

c') $\mathscr{D}(B_1^2) \subset \mathscr{D}(A)$ ed $\exists K \in R^+$, tale che

$$\|AB_1^{-1}(\lambda+B_1)^{-1}\| < 1,$$

$\forall \lambda \in C$, $|\lambda|>K$, $Re\lambda \geq 0$.

Vediamo ora di trovare delle condizioni sugli operatori A e B che garantiscano il verificarsi della condizione b) del Teorema 1 o b') del Teorema 2.

A questo proposito, ricordo la definizione di semi prodotto interno (Lumer [4]).

Sia X uno spazio normato complesso. Una funzione

$$[\cdot,\cdot] : X \times X \to C$$

viene detta un semiprodotto interno se:

i) $[\alpha x+\beta y,z] = \alpha[x,z] + \beta[y,z]$, $\forall \alpha,\beta \in C$, $\forall x,y \in X$;

ii) $|[x,y]| \leq \|x\| \|y\|$, $\forall x,y \in X$;

iii) $|[x,x]| = \|x\|^2$, $\forall x \in X$.

Inoltre $[\cdot,\cdot]$ può essere sempre scelto in modo che

iv) $[x,\alpha y] = \bar{\alpha}[x,y]$, $\forall x,y \in X$, $\forall \alpha \in C$.

Segue dal Teorema di Hahn-Banach che in ogni spazio normato esiste almeno un semi prodotto interno; inoltre esso è unico se lo spazio è riflessivo.

In particolare, se $X = L^p(\Omega)$, $1<p<+\infty$,

$$[u,v] = \frac{1}{\|v\|^{p-2}_{L^p}} \int_\Omega u(x)|v(x)|^{p-2}\,\bar{v}(x)dx, \quad \text{se} \quad v \not\equiv 0,$$

con la convenzione che funzione integranda è nulla dove $v(x) = 0$, e $[u,v] = 0$, se $v \equiv 0$.

Ebbene, se $\exists c \in R^+$, tale che

$$(3) \qquad |\mathrm{Im}[Au,Bu]| \leq C\ \mathrm{Re}[Au,Bu],$$

$\forall u \in \mathscr{D}(A) \cap \mathscr{D}(B)$, e se $\exists \lambda_0 \in R^+$, tale che $(\lambda_0 B+A)(\mathscr{D}(A) \cap \mathscr{D}(B)) = X$, $-AB^{-1}$ genera un semigruppo analitico.

<u>Esempio 4.</u> Sia $1<p<+\infty$; in $L^p(]a,b[)$ consideriamo gli operatori

$$Au = -u^{(vi)},$$

$$Bu = u^{(iv)},$$

con le condizioni ai limiti $u(a) = u'(a) = u^{(v)}(a) = u(b) = u'(b) = u^{(v)}(b)$. In tal caso, la (3) è soddisfatta con $C = 1$. Poiché anche le condizioni a) e c) del Teorema 1 sono soddisfatte, il fascio $\lambda^2 + \lambda B+A$ è parabolico.

In uno spazio di Hilbert, ovviamente l'unico semiprodotto interno è il prodotto interno. In tal caso è ovviamente molto più facile stabilire disuguaglianze del tipo (3).

In particolare, se A e B sono autoaggiunti, positivi e commutano, risulta $(Au,Bu) \geq 0$, $\forall u \in \mathscr{D}(A) \cap \mathscr{D}(B)$ e, quindi, la (3) è automaticamente soddisfatta.

<u>Esempio 5.</u> Siano $\mathscr{A}(D)$, $\mathscr{B}(D)$ operatori differenziali ellittici a coefficienti costanti in R^n di ordini $2m$ e $2k$, rispettivamente $(\frac{m}{2} < k < m)$.

Qui ho posto $D = (D_1,\dots,D_n)$, $D_k = -i \frac{\partial}{\partial x_k}$. Allora, se $\exists c, d \in R$, tali che $\mathscr{A}(\xi) > c$, $\mathscr{B}(\xi) > d$, $\forall \xi \in R^n$, le realizzazioni in $L^2(R^n)$ di $\mathscr{A}(D)-c$ e di $\mathscr{B}(D)-d$ risultano positive e autoaggiunte e inoltre commutano. Pertanto il fascio $\lambda^2+\lambda(\mathscr{B}(D)-d)+\mathscr{A}(D)-c$ è parabolico in $L^2(R^n)$; per la proposizione 4, risulta allora parabolico anche il fascio $\lambda^2+\lambda\mathscr{B}(D) + \mathscr{A}(D)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. AVILES-J.T. SANDEFUR jr.: Nonlinear Second Order Equations with Applications to Partial Differential Equations, J. Diff. Eqs., 58 (1985).

[2] Ph. CLEMENT-J. PRÜSS: On Second Order Differential Equations in Hilbert Space, preprint 1988.

[3] H.O. FATTORINI: The Cauchy Problem, Encyclopedia of Math. Appl., Vol. 18, Addison-Wesley (1983).

[4] G. LUMER: Semi-inner-product Spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 100 (1961), pp. 29-43.

[5] A. LUNARDI: Local Stability Results for the Elastic Beam Equation, SIAM J. Math. Anal., 18 (1987), pp. 1341-1366.

[6] F. NEUBRANDER: Well-posedness of Higher Order Abstract Cauchy Problems, Trans. Amer. Math. Soc., 295 (1986), pp. 257-290.

[7] E. OBRECHT: Evolution Operators for Higher Order Abstract Parabolic Equations, Czech. Math. J., 36 (111)(1986), pp. 210-222.

[8] ———— : The Cauchy Problem for Time-Dependent Abstract Parabolic Equations of Higher Order, J. Math. Anal. Appl., 125 (1987), pp. 508-530.

[9] ———— : Spazi di interpolazione connessi con equazioni differenziali di ordine superiore in uno spazio di Banach, Seminario di Analisi Matematica, Dip.to di Matematica, Univ. di Bologna, A.A. 1986/87, pp. X.1-X.13.

[10] J.T. SANDEFUR jr.: Existence and Uniqueness of Solutions of Second Order Nonlinear Differential Equations, SIAM J. Math. Anal., 14 (1983), pp. 477-487.

[11] A.A. ŠKALIKOV: Fasci operatoriali fortemente smorzati e risolubilità delle corrispondenti equazioni differenziali operatoriali (in russo), Mat. Sb., 135 (177) (1988), pp. 96-117.

[12] H. TANABE: Volterra Integro-differential Equations of Parabolic Type of Higher Order in t, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 34 (1987), pp. 111-125.

[13] ———— : On Fundamental Solutions of Linear Parabolic Equations of Higher Order in Time and Associated Volterra Equations, J. Differential Equations, 73 (1988), pp. 288-308.

[14] M. WONG: Spectra of Pseudo-Differential Operators on $L^p(R^n)$, Comm. Partial Differential Equations, 4 (1979), pp. 1389-1401.

[15] S. CHEN-R. TRIGGIANI: Proof of Extensions of two Conjectures on Structural Damping for Elastic Systems, preprint 1988.